УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.95

О СЛОЖНОСТИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ КОНТАКТНЫХ СХЕМ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛУСТЕПЕНЬЮ ИСХОДА

А.Е. Шиганов

Аннотация

В работе исследуется реализация булевых функций в классе ориентированных контактных схем (ОКС) с некоторыми ограничениями на вес и число смежных контактов. Рассматриваются ОКС, в которых из произвольной вершины может исходить не более λ дуг. Вводится понятие веса вершины ОКС, который полагается равным λ, если в вершину входит одна дуга и $\lambda(1+\omega)$, где $\omega > 0$, в противном случае. Далее обычным образом определяется вес ОКС как сумма весов вершин, вес булевой функции как минимальный вес реализующих ее ОКС и функция Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$ как максимальный вес булевой функции от n переменных. Для этой функции Шеннона при $\lambda > 1$ и произвольном $\omega > 0$ получена так называемая оценка высокой степени точности:

$$W_{\lambda,\omega}(n) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{2^n}{n}\left(1+\frac{\dfrac{\lambda-2}{\lambda-1}\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

Полученный результат показывает, каким образом введение ограничений на количество исходящих из вершин ОКС дуг влияет на асимптотическое поведение функции Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$ и на первый остаточный член ее разложения. Отметим, что от величины ω зависит только константа в члене $O(1)$.

Ключевые слова: булева функция, ориентированная контактная схема, сложность, функция Шеннона, оценка высокой степени точности.

1. Постановка задачи

В настоящей работе изучается поведение функции Шеннона, связанной с реализацией булевых функций в классе ориентированных контактных схем[1] (ОКС) с некоторыми ограничениями на вес и число смежных контактов.

Пусть U – класс всех ОКС, а U_λ – класс ОКС Σ таких, что полустепени исхода вершин Σ не превосходят λ. Весом вершины v ОКС Σ из класса U_λ назовем λ, если в v входит одна дуга и $\lambda(1+\omega)$, где $\omega > 0$, в противном случае. Под сложностью $L(\Sigma)$ произвольной ОКС Σ будем понимать число контактов в ней. Весом $W_{\lambda,\omega}(\Sigma)$ ОКС Σ из класса U_λ назовем сумму весов вершин Σ. Отметим, что если $\Sigma \in U_\lambda$, то $L(\Sigma) \leqslant W_{\lambda,\omega}(\Sigma)$.

Сложностью $L(f)$ (соответственно, весом $W_{\lambda,\omega}(f)$) булевой функции f называется минимальное число контактов (соответственно, минимальный вес) ОКС Σ, $\Sigma \in U$ (соответственно, $\Sigma \in U_\lambda$), реализующей f. Функции Шеннона, связанные с функционалами $L(f)$ и $W_{\lambda,\omega}(f)$, определяются обычным образом:

$$L(n) = \max_{f(x_1,\ldots,x_n)} L(f), \quad W_{\lambda,\omega}(n) = \max_{f(x_1,\ldots,x_n)} W_{\lambda,\omega}(f).$$

[1]Понятия, которые в данной работе не определяются, могут быть найдены, например, в [1, 2].

Асимптотическое значение $2^n/n$ функции Шеннона для сложности ориентированных контактных схем может быть установлено с использованием результатов О.Б. Лупанова [3, 4]. Из этих результатов, в частности, следует, что[2]

$$\frac{2^n}{n}\left(1+\frac{2\log n - O(1)}{n}\right) \leqslant L(n) \leqslant \frac{2^n}{n}\left(1+\frac{3\log n + O(1)}{n}\right).$$

В работе [5] оценки для $L(n)$ были впервые уточнены, а именно: была получена так называемая асимптотическая оценка высокой степени точности (АОВСТ)[3]:

$$L(n) = \frac{2^n}{n}\left(1+\frac{2\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

В работе [6] была получена АОВСТ для функции Шеннона, связанной с реализацией булевых функций в классе двоичных решающих диаграмм (BDD) (см., например, [2, гл. 2, § 7]) с весовыми ограничениями. В этой работе вес вершины BDD полагался равным 1, если в вершину входит одна дуга и $(1+\omega)$, $\omega > 0$, в противном случае. В работе [7] рассматривался класс контактных схем с ограничением на степени вершин и была получена асимптотика соответствующей функции Шеннона.

В настоящей работе модель весовых ограничений в классе BDD [6] и структурных ограничений [7] переносится на случай ОКС. Основным результатом данной работы является следующая

Теорема. *Для $n \geqslant 1$, $\omega > 0$, $\lambda > 1$ справедливо равенство*

$$W_{\lambda,\omega}(n) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{2^n}{n}\left(1+\frac{\dfrac{\lambda-2}{\lambda-1}\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

2. Основные определения и вспомогательные результаты

Для набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ единичного n-мерного куба $\{0,1\}^n$ будем использовать сокращенную запись $\tilde{\alpha}$. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – булева функция, тогда набор $(x_1,\ldots,x_n)$ будет обозначаться через $\widetilde{x}$, а множество $\{x_1,\ldots,x_n\}$ – через X.

На наборах единичного куба $\{0,1\}^n$ будем рассматривать лексикографический порядок, который задается нумерацией $\nu : \{0,1\}^n \to [0,2^n)$ такой, что для набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \{0,1\}^n$ его номер $\nu(\tilde{\alpha})$ равен $\alpha_1 2^{n-1} + \alpha_2 2^{n-2} + \cdots + \alpha_n 2^0$.

Пусть D – разбиение множества булевых переменных Y функции $\psi(\tilde{y})$ на компоненты $Y_1,\ldots,Y_d$. Разбиение D называется селекторным разбиением переменных функции $\psi(\tilde{y})$ [8, §3], если для любого i, $i=1,\ldots,d$, и для любой переменной y, $y \in Y_i$, найдется константа $\sigma \in \{0,1\}$ и набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_d) \in \{0,1\}^{d-1}$ такие, что если заменить каждую переменную из множества Y_j, $j=1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,d$, константой α_j, то функция ψ совпадет с $y \oplus \sigma$.

Пусть D – разбиение множества Y на компоненты $Y_1,\ldots,Y_d$. Величина

$$H(D) = -\frac{1}{|Y|}\sum_{i=1}^{d}|Y_i|\log\frac{|Y_i|}{|Y|}$$

называется энтропией разбиения D.

[2]Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.
[3]Равенство $h(n) = t(n) \pm O(g(n))$ означает, что $|h(n) - t(n)| = O(g(n))$.

Пусть D – разбиение множества Y на компоненты $Y_1, \ldots, Y_d$ и пусть $Z \subseteq Y$, а $i_1, \ldots, i_k$ $(1 \leqslant k \leqslant d)$ – номера компонент разбиения D, имеющих непустое пересечение с Z. Тогда будем говорить, что разбиение $\Delta = (Z \cap Y_{i_1}, \ldots, Z \cap Y_{i_k})$ порождается разбиением D на множестве Z.

Разбиение D называется геометрическим разбиением с основанием λ кратности q и высоты h, если оно для каждого i, $i = 0, \ldots, h-1$ включает в себя q компонент мощности λ^i и, возможно, содержит еще не более λ дополнительных компонент. Отметим, что в этом случае[4] $H(D) \leqslant \log q + c_1(\lambda)$, где $c_1(\lambda) = \log \lambda + 5$, (см., например, доказательство для случая $\lambda = 2$, приведенное в [8, § 3]).

Напомним, что в [8] указан способ, как из селекторных разбиений для исходных функций получать селекторные разбиения для их суперпозиций.

Лемма 1. *Пусть D_i, $i = 1, 2$, – селекторное разбиение множества переменных Y_i функции $\psi_i(\tilde{y}_i)$, $Z = \{z_1, \ldots, z_t\}$ – одна из компонент D_1, $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^t$ – система взаимно-однозначных отображений множества Y_2 в различные непересекающиеся между собой и с Y_1 множества переменных, а суперпозиция $\mathcal{F}$, которая получается из функции $\psi_1(\tilde{y}_1)$ в результате замены каждой переменной z_j, $j = 1, \ldots, t$, на функцию вида $\psi_2(\xi_j(\tilde{y}_2))$, реализует функцию $\psi_3(\tilde{y}_3)$ от множества переменных Y_3.*

Тогда разбиение D множества Y_3, которое включает в себя отличные от Z компоненты D_1, а также все компоненты вида $\xi(Q)$, где Q – компонента D_2 и

$$\xi(Q) = \bigcup_{j=1}^{t} \bigcup_{y \in Q} \xi_j(y),$$

является селекторным разбиением переменных функции ψ_3.

Рассмотрим булеву функцию от 2λ переменных $\hat{\psi}_\lambda(u_1, \ldots, u_\lambda, y_1, \ldots, y_\lambda) = u_1 y_1 \vee \cdots \vee u_\lambda y_\lambda$. Первые λ переменных $u_1, \ldots, u_\lambda$ (соответственно, последние λ переменных $y_1, \ldots, y_\lambda$) функции $\hat{\psi}_\lambda$ будем называть управляющими (соответственно, узловыми) переменными. Легко видеть, что разбиение $(\{u_1\}, \ldots, \{u_\lambda\}, \{y_1, \ldots, y_\lambda\})$ является селекторным разбиением переменных функции $\hat{\psi}_\lambda$.

Будем рассматривать суперпозиции функций $\hat{\psi}_\lambda$, в которых подстановка одних функций осуществляется на места узловых переменных других. При этом если $\mathcal{F}$ – формула в базисе $\{\hat{\psi}_\lambda\}$, то будем говорить, что переменная формулы $\mathcal{F}$ является управляющей (соответственно, узловой), если она является управляющей (соответственно, узловой) в некоторой функции $\hat{\psi}_\lambda$, участвующей в суперпозиции.

Запись $\Sigma(a'_1, \ldots, a'_p; a''_1, \ldots, a''_q; x_1, \ldots, x_n)$, где Σ – ОКС, означает, что схема Σ имеет входы $a'_1, \ldots, a'_p$, выходы $a''_1, \ldots, a''_q$ и зависит от переменных $x_1, \ldots, x_n$. В этом случае также будем пользоваться сокращенной записью $\Sigma(x_1, \ldots, x_n)$.

Напомним, что формула $\mathcal{F}$ называется абсолютной, если каждая ее входная переменная встречается в записи формулы $\mathcal{F}$ один раз.

Лемма 2. *Для любого натурального l найдется абсолютная формула $\mathcal{F}^{(l)}$ в базисе $\{\hat{\psi}_\lambda\}$, реализующая функцию $\psi^{(l)}(u_1, \ldots, u_{l'}, y_1, \ldots, y_{l''})$, где $l' = \lambda(\lambda^l - 1)/(\lambda - 1)$, $l'' = \lambda^l$, такую, что:*

1) *переменные $u_1, \ldots, u_{l'}$ (соответственно, $y_1, \ldots, y_{l''}$) являются узловыми (соответственно, управляющими) переменными;*

2) *существует селекторное разбиение $D^{(l)}$ переменных функции $\psi^{(l)}$, являющееся геометрическим разбиением с основанием λ кратности λ и высоты l с одной дополнительной компонентой, содержащей все узловые переменные;*

[4] Буквой c с индексами будем обозначать константы.

3) *существует* $(1, l'')$-*ОКС* $T^{(l)}(b_0; b_1, \ldots, b_{l''}; u_1, \ldots, u_{l'})$ *из класса* U_λ *такая, что*

$$\psi^{(l)}(u_1, \ldots, u_{l'}, y_1, \ldots, y_{l''}) = \bigvee_{i=1}^{l''} f_i(u_1, \ldots, u_{l'}) y_i,$$

где f_i *– функция проводимости от входа* $T^{(l)}$ *к выходу* b_i, $i = 1, \ldots, l''$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по l. Легко видеть, что в качестве формулы $\mathcal{F}^{(1)}$ достаточно взять функцию $\hat{\psi}_\lambda(u_1, \ldots, u_\lambda, y_1, \ldots, y_\lambda)$. Положим $D^{(1)} = (\{u_1\}, \ldots, \{u_\lambda\}, \{y_1, \ldots, y_\lambda\})$. Схема $T^{(1)}(u_1, \ldots, u_\lambda)$ состоит из вершины (входа) b_0, из которой исходят λ дуг, помеченных переменными $u_1, \ldots, u_\lambda$, а концы этих дуг являются выходами с пометками $b_1, \ldots, b_\lambda$ соответственно.

Пусть формула $\mathcal{F}^{(l)}$, разбиение $D^{(l)}$ и схема $T^{(l)}$ удовлетворяют указанным в лемме свойствам. Применим лемму 1 к функциям $\psi_1 = \psi^{(l)}$, $\psi_2 = \hat{\psi}_\lambda$, в качестве компоненты Z возьмем дополнительную компоненту разбиения $D^{(l)}$ мощности λ^l, а полученную в результате формулу и селекторное разбиение ее переменных обозначим через $\mathcal{F}^{(l+1)}$ и $D^{(l+1)}$ соответственно. Пусть при этом для переменных функций ψ_2 использовалась система взаимно-однозначных отображений $\{\xi_j\}_{j=1}^{\lambda^l}$. Для $i = 1, \ldots, \lambda^l$ присоединим к выходу b_i схемы $T^{(l)}$ схему $T_i^{(1)} = T^{(1)}(b_{i,0}; b_{i,1}, \ldots, b_{i,\lambda}; \xi_i(u_1, \ldots, u_\lambda))$ и обозначим результат суперпозиции через $T^{(l+1)}$. При этом входные пометки присоединенных схем $T_1^{(1)}, \ldots, T_{\lambda^l}^{(1)}$ и выходные пометки схемы $T^{(l)}$ снимаются, а выходы схем $T_1^{(1)}, \ldots, T_{\lambda^l}^{(1)}$ объявляются выходами $T^{(l+1)}$. Легко видеть, что можно так переименовать без отождествления переменные формулы $\mathcal{F}^{(l+1)}$ и схемы $T^{(l+1)}$, а также дополнительно переименовать выходы схемы $T^{(l+1)}$, что формула $\mathcal{F}^{(l+1)}$, разбиение $D^{(l+1)}$ и схема $T^{(l+1)}$ будут являться искомыми. □

Пусть p_0 – натуральное, $p_0 \geqslant \lambda$, а h_0, h и p выбраны так, что

$$h_0 = \left\lfloor \frac{\log p_0}{\log \lambda} \right\rfloor, \quad h = \left\lceil \frac{\log p_0}{\log \lambda} \right\rceil, \quad p = \left\lceil \frac{p_0 - \lambda^{h_0}}{\lambda(\lambda - 1)} \right\rceil \lambda(\lambda - 1) + \lambda^{h_0}. \tag{1}$$

Отметим, что при этом $p_0 \leqslant p < p_0 + \lambda(\lambda - 1)$, p кратно λ, $(p - \lambda^{h-1})$ кратно $(\lambda - 1)$. Обозначим $a = (p - \lambda^{h-1})/(\lambda - 1)$. При $p = \lambda$ положим $\varphi_p = \psi^{(1)}$, $D = D^{(1)}$, $T_p = T^{(1)}$. При $p > \lambda$ возьмем формулу $\mathcal{F}^{(h-1)}$, разбиение $D^{(h-1)}$ и схему $T^{(h-1)}$, построенные по лемме 2. Разобьем дополнительную компоненту разбиения $D^{(h-1)}$ на два непересекающихся множества Z_1 и Z_2 такие, что $Z_1 = \{y_1, \ldots, y_a\}$, $|Z_2| = \lambda^{h-1} - a$. Применим лемму 1 к функциям $\psi_1 = \psi^{(h-1)}$, $\psi_2 = \hat{\psi}_\lambda$ и компоненте Z_1, а полученную в результате суперпозиции функцию и селекторное разбиение ее переменных обозначим через φ_p и D соответственно. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{a}$ – использовавшаяся при этом система взаимно-однозначных отображений множества переменных функций $\hat{\psi}_\lambda$. Для каждого $i = 1, \ldots, a$ присоединим к выходу b_i схемы $T^{(h-1)}$ схему $T_i^{(1)} = T^{(1)}(b_{i,0}; b_{i,1}, \ldots, b_{i,\lambda}; \xi_i(u_1, \ldots, u_\lambda))$ и обозначим результат суперпозиции через T_p. При этом входные пометки присоединенных схем $T_1^{(1)}, \ldots, T_a^{(1)}$ и выходные пометки $b_1, \ldots, b_a$ схемы $T^{(h-1)}$ снимаются, а выходы схем $T_1^{(1)}, \ldots, T_a^{(1)}$ и вершины $b_{a+1}, \ldots, b_{\lambda^{h-1}}$ объявляются выходами схемы T_p. Таким образом, схема T_p является $(1,p)$-ОКС из класса U_λ. Переименуем без отождествления переменные функции φ_p и схемы T_p, а также дополнительно переименуем выходы схемы T_p так, что

$$\varphi_p(u_1, \ldots, u_{p'}, y_1, \ldots, y_p) = \bigvee_{i=1}^{p} f_i(u_1, \ldots, u_{p'}) y_i,$$

где $p' = \lambda(p-1)/(\lambda-1)$, множество $U = \{u_1, \ldots, u_{p'}\}$ (соответственно, множество $Y = \{y_1, \ldots, y_p\}$) есть множество всех управляющих (соответственно, всех узловых) переменных функции φ_p, f_i – функция проводимости от входа T_p к выходу b_i, $i = 1, \ldots, p$.

Пусть D_1 (соответственно, D_2) – разбиение, порожденное разбиением D на множестве U (соответственно, Y). Отметим, что в случае $a = \lambda^{h-1}$ (соответственно, $a < \lambda^{h-1}$) разбиение D_1 является геометрическим разбиением с основанием λ кратности λ высоты h без дополнительных компонент (соответственно, высоты $h-1$ с λ дополнительными компонентами), откуда вытекает, что $H(D_1) \leqslant c_2(\lambda)$, $c_2(\lambda) = 2\log\lambda + 5$. Легко видеть, что $H(D_2) \leqslant 1$ для любого a.

Пусть $\psi(y_1, \ldots, y_p)$ – булева функция, существенно зависящая от всех своих переменных. Множество функций G от переменных $x_1, \ldots, x_m$ называется универсальным порядка m для ψ, если для любой булевой функции $g(x_1, \ldots, x_m)$ в G найдутся функции $g_1, \ldots, g_p$ такие, что g может быть представлена в виде

$$g = \psi(g_1, \ldots, g_p).$$

Из [8, Лемма 6] вытекает способ построения универсального множества порядка m для функции ψ на основании селекторного разбиения ее переменных.

Лемма 3. *Пусть D – селекторное разбиение множества переменных Y функции $\psi(\tilde{y})$, а Δ – некоторое разбиение множества Y на компоненты Y_i, $i = 1, \ldots, k$, и пусть разбиение D_i, $i = 1, \ldots, k$, порождается разбиением D на множестве Y_i. Тогда для любых натуральных $s_1, \ldots, s_k, m$ таких, что $s_i > \log|Y_i|$, $i = 1, \ldots, k$,*

$$2^m \leqslant \sum_{i=1}^{k} |Y_i|(s_i - H(D_i))$$

существует универсальное множество G порядка m для ψ такое, что $G = G_1 \cup \cdots \cup G_k$ и для каждого $i = 1, \ldots, k$ выполнены условия:

1) $|G_i| \leqslant 2^{s_i+2}$*;*

2) *функции из множества G_i используются для подстановки на места переменных множества Y_i;*

3) *число различных функций вида $g'(x_1, \ldots, x_{m-1}, \sigma)$, где $g' \in G_i$, $\sigma \in \{0,1\}$, не больше, чем $2^{s_i/2+1}$.*

Лемма 4. *Пусть натуральные s', s'', m и p выбраны так, что p удовлетворяет (1) для некоторого натурального p_0 и выполнены следующие соотношения:*

$$s' > \log\frac{\lambda(p-1)}{\lambda-1}, \quad s'' > \log p, \quad 2^m \leqslant \frac{\lambda(p-1)}{\lambda-1}(s' - c_2(\lambda)) + p(s''-1).$$

Тогда существует универсальное множество G порядка m для φ_p такое, что $G = G' \cup G''$, $|G'| \leqslant 2^{s'+2}$, $|G''| \leqslant 2^{s''+2}$, функции из G' (соответственно, G'') используются для подстановки на места переменных множества U (соответственно, множества Y), и число различных функций вида $g''(x_1, \ldots, x_{m-1}, \sigma)$, где $g'' \in G''$, $\sigma \in \{0,1\}$, не больше, чем $2^{s''/2+1}$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 3 к функции φ_p и разбиениям D_1, D_2, порожденным разбиением D на множествах переменных U и Y соответственно. При этом необходимо положить $s_1 = s'$, $s_2 = s''$. □

Множество $S \subset \{0,1\}^q$ называется m-регулярным [2, гл. 4, § 6], если $m < q$, $|S| = 2^m$ и наборы из S имеют различные префиксы длины m. Заметим, что на

m-регулярном множестве наборов $S \subset \{0,1\}^q$ любая функция $f(x_1,\ldots,x_q)$ совпадает с некоторой функцией $g(x_1,\ldots,x_m)$. Из результатов [2, гл. 4, § 6] вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 5. *Пусть $m < q$ и $G = \{g_1,\ldots,g_{q-m}\}$ – множество функций от переменных $x_1,\ldots,x_m$. Тогда существует разбиение $\Delta = (S_1,\ldots,S_{2^{q-m}})$ куба $\{0,1\}^q$ такое, что для $i = 1,\ldots,2^{q-m}$ множество S_i является m-регулярным и каждая функция g_j, $j = 1,\ldots,q-m$, совпадает на S_i с переменной x_{j+m} или с ее отрицанием.*

Пусть s', s'', m, p удовлетворяют условию леммы 4 и G – универсальное множество порядка m для φ_p, построенное по этой лемме. Обозначим $q = m + |G'|$, и пусть $\Delta' = (S_1,\ldots,S_{2^{q-m}})$ – разбиение куба $\{0,1\}^q$, построенное по лемме 5 для множества функций G'. Отметим, что на наборах из S_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^{q-m}$, произвольная функция $g(x_1,\ldots,x_q)$ совпадает с некоторой функцией $\widehat{g}$ от m переменных, для которой можно подобрать функции $g'_1,\ldots,g'_{p'}$ из G' и функции $g''_1,\ldots,g''_p$ из G'' такие, что
$$\widehat{g} = \varphi_p(g'_1,\ldots,g'_{p'},g''_1,\ldots,g''_p).$$
В то же время по лемме 5 найдутся булевы константы $\alpha_1,\ldots,\alpha_{p'}$ такие, что на наборах из S_i функция g' совпадает с некоторой функцией $\widehat{\widehat{g}}$ вида
$$\widehat{\widehat{g}} = \varphi_p(x_{i_1}^{\alpha_1},\ldots,x_{i_{p'}}^{\alpha_{p'}},g''_1,\ldots,g''_p), \tag{2}$$
где $m < i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{p'} \leqslant q$.

3. Доказательство верхней оценки функции Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$

Для произвольной функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ построим $(1,1)$-ОКС Σ_f из класса U_λ, реализующую f, такую, что
$$W_{\lambda,\omega}(\Sigma_f) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\log n + O(1)}{n}\right).$$

Пусть s', s'', m, p выбраны так, что выполнены условия леммы 4 и при этом $q = m + |G'| < n$. Рассмотрим разложение функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ по переменным $x_{q+1},\ldots,x_n$:
$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{\tilde{\sigma}''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}}\cdots x_n^{\sigma_n}\cdot f(\tilde{x}',\tilde{\sigma}''),$$
где $\tilde{x}' = (x_1,\ldots,x_q)$. Воспользовавшись разбиением Δ', получаем следующее основное представление для f:
$$f(x_1,\ldots,x_n) = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \chi_i(\tilde{x}')\left(\bigvee_{\tilde{\sigma}''=(\sigma_{q+1},\ldots,\sigma_n)} x_{q+1}^{\sigma_{q+1}}\cdots x_n^{\sigma_n} f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')\right), \tag{3}$$
где $\chi_i(\tilde{x}')$ – характеристическая функция множества S_i, $i = 1,\ldots,2^{q-m}$, а функция $f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')$ совпадает с $f(\tilde{x}',\tilde{\sigma}'')$ на наборах S_i и имеет вид (2).

Напомним, что глубиной вершины корневого дерева называется число ребер на пути от корня к этой вершине. Высота корневого дерева определяется как максимальная глубина его листьев.

Пусть $(1,2^n)$-ОКС $\Sigma_n(a'; a''_0, \ldots, a''_{2^n-1}; x_1, \ldots, x_n)$ представляет собой полное двоичное корневое дерево высоты n, в котором вход a' является корнем, выходы $a''_0, \ldots, a''_{2^n-1}$ являются листьями, все дуги ориентированы от корня к листьям, из вершин глубины i, $i = 0, \ldots, n-1$, исходят противоположные контакты переменной x_i, а путь от входа к выходу a''_j, $j = 0, \ldots, 2^n - 1$, содержит контакты, помеченные переменными $x_1^{\sigma_1}, \ldots, x_n^{\sigma_n}$ так, что $\nu((\sigma_1, \ldots, \sigma_n)) = j$.

Возьмем схему $\Sigma_q(x_1, \ldots, x_q)$ и для каждого i, $i = 1, \ldots, 2^{q-m}$, отождествим те ее выходные вершины, номера которых совпадают с номерами наборов из S_i. Полученную $(1, 2^{q-m})$-ОКС обозначим через Σ'. Заметим, что Σ' реализует систему характеристических функций для компонент $(S_1, \ldots, S_{2^{q-m}})$ разбиения Δ'. К каждому выходу Σ' присоединим отдельную $(1, 2^{n-q})$-ОКС $\Sigma_{n-q}(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ так, чтобы множества выходных пометок присоединенных схем не пересекались между собой. Обозначим полученную схему через $\widehat{\Sigma}$. При этом снимем выходные пометки схемы Σ', входные пометки схем Σ_{n-q}, а выходы схем Σ_{n-q} объявим выходами $\widehat{\Sigma}$. Легко видеть, что

$$W_{\lambda,\omega}(\widehat{\Sigma}) \leqslant \lambda\omega 2^q + \lambda 2^{n-m}.$$

Рассмотрим $(t, 1)$-ОКС Σ'', $t \leqslant 2^{s''+2}$, реализующую все различные функции из G'', которую можно построить, используя метод каскадов, следующим образом:

1) разложение проводится по переменным $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$;

2) все остаточные функции вида $g''(x_1, \ldots, x_{m-1}, \sigma)$, где $g'' \in G''$, $\sigma \in \{0, 1\}$, реализуются без отождествления вершин.

Из леммы 4 вытекает, что $W_{\lambda,\omega}(\Sigma'') = O(2^{s''}) + O(2^{m+s''/2})$.

Так как каждая функция $f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')$ в разложении (3) имеет вид (2), то есть существуют функции $g''_1, \ldots, g''_p$, принадлежащие G'', набор булевых констант $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p'}$ и набор индексов $m < i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_{p'} \leqslant q$ такие, что

$$f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}') = \varphi_p(x_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{i_{p'}}^{\alpha_{p'}}, g''_1, \ldots, g''_p),$$

то $f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')$ может быть реализована с использованием схемы T_p следующим образом:

1) переменные $u_1, \ldots, u_{p'}$ заменяются переменными $x_{i_1}^{\alpha_1}, \ldots, x_{i_{p'}}^{\alpha_{p'}}$ соответственно;

2) выходы $b_1, \ldots, b_p$ отождествляются с теми входами схемы Σ'', где реализуются функции $g''_1, \ldots, g''_p$ соответственно.

Осуществим указанную операцию для каждой функции $f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')$. При этом будем использовать одну схему Σ'' и 2^{n-m} отдельные схемы T_p. Входные полюса, в которых реализуются функции $f_{\tilde{\sigma}'',i}(\tilde{x}')$, отождествим с соответствующими выходами схемы $\widehat{\Sigma}$ в соответствии с разложением (3) и обозначим полученную схему через Σ_f. Отметим, что

$$W_{\lambda,\omega}(\Sigma_f) \leqslant \frac{\lambda}{\lambda - 1} p\, 2^{n-m} + O\left(2^q + 2^{n-m} + 2^{s''} + 2^{m+s''/2}\right).$$

Выберем параметры m, s', s'' и p_0 следующим образом:

$$m = \lfloor 2\log n \rfloor - 8, \quad s' = \lfloor \log n \rfloor - 4, \quad s'' = 2\lceil (n - 2\log n)/2 \rceil,$$

$$p_0 = \left\lceil \frac{2^m + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}(s' - c_2(\lambda))}{\dfrac{\lambda}{\lambda - 1}(s' - c_2(\lambda)) + s'' - 1} \right\rceil,$$

а значение p выберем в соответствии с условием (1). Начиная с некоторого n, $n \geqslant n_0$, для выбранных значений будут выполнены условия леммы 4. Таким образом, доказана верхняя оценка для функции Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$.

4. Нижняя мощностная оценка функции Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$

Лемма 6. *Количество неизоморфных* $(1,1)$*-ОКС* Σ, $\Sigma \in U_\lambda$, *от переменных* $x_1,\ldots,x_n$ *таких, что* $W_{\lambda,\omega}(\Sigma) \leqslant W$, *не больше, чем* $n^W(c_3W/\log W)^{(\lambda-1)W/\lambda}$, $c_3 = c_3(\lambda,\omega)$.

Доказательство. Пусть схема Σ из рассматриваемого класса содержит t вершин с полустепенью захода больше 1. Для того чтобы задать такую схему Σ, достаточно выбрать ее остовное наддерево $\mathcal{D}$ [2, гл. 2, § 1], пометить дуги $\mathcal{D}$ буквами переменных, выбрать t вершин $\mathcal{D}$ и присоединить листья $\mathcal{D}$ к выбранным вершинам. Обозначим через p количество вершин в Σ, тогда $p \leqslant W/\lambda - \omega t$. Отметим, что Σ содержит не более λp ребер, поэтому количество способов выбрать наддерево $\mathcal{D}$ не превосходит $4^{\lambda p}$ [1]. Пусть v – внутренняя вершина $\mathcal{D}$, тогда количество различных способов пометить буквами дуги, исходящие из v, не превосходит $(2n)^\lambda$. Выбрать t вершин дерева $\mathcal{D}$ можно не более, чем $2^{\lambda p+1}$ разными способами. Дерево $\mathcal{D}$ содержит не больше $\lambda p - p + 1$ листьев, которые можно присоединить к выбранным t вершинам. Таким образом, получаем верхнюю оценку $c_4^p n^{\lambda p} t^{\lambda p - p + 1}$, $c_4 = c_4(\lambda)$, на число неизоморфных ОКС рассматриваемого класса на p вершинах, из которых t имеют полустепень захода больше 1. С учетом того, что $p \leqslant W/\lambda - \omega t$, $0 \leqslant t \leqslant W/(\omega\lambda)$, и неравенства

$$\max_{x\in[0,q]} x^{q-x} \leqslant \left(\frac{c_5 q}{\log q}\right)^q,$$

получаем утверждение леммы. □

Для доказательства нижней оценки функции Шеннона $W_{\lambda,\omega}(n)$ воспользуемся мощностным неравенством, вытекающим из леммы 6,

$$n^{W_{\lambda,\omega}(n)}\left(\frac{c_3W_{\lambda,\omega}(n)}{\log W_{\lambda,\omega}(n)}\right)^{\frac{\lambda-1}{\lambda}W_{\lambda,\omega}(n)} \geqslant 2^{2^n}$$

и тем фактом, что $\log W_{\lambda,\omega}(n) \leqslant n - \log n + O(1)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00817-а).

Summary

A.E. Shiganov. On Complexity of Oriented Contact Circuits with Limited Out-degree.

The paper studies the implementation of Boolean functions in the class of oriented contact circuits with some restriction on the weight and number of adjacent contacts. Circuits under consideration are those in which out-degree of every vertex is not more than λ. The weight of vertex is defined as λ if its in-degree is one and $\lambda(1+\omega)$, where $\omega > 0$, otherwise. Weight of the circuit is sum of weights of its vertices. Weight of Boolean function f is defined as minimal weight of circuit implementing f. Shannon function $W_{\lambda,\omega}(n)$ is maximal weight of Boolean function on n input variables. For this function in case when $\lambda > 1$ and for any $\omega > 0$ we obtain so-called high-accuracy asymptotic bound:

$$W_{\lambda,\omega}(n) = \frac{\lambda}{\lambda-1}\frac{2^n}{n}\left(1 + \frac{\frac{\lambda-2}{\lambda-1}\log n \pm O(1)}{n}\right).$$

The results shows how introduction of restrictions on the out-degree of circuit's vertices influences asymptotic behaviour of Shannon function $W_{\lambda,\omega}(n)$ and term $\log n/n$ in its asymptotic expansion. Note that value of ω influences only on constant in the term $O(1)$.

Key words: Boolean function, oriented contact circuit, complexity, Shannon function, high-accuracy asymptotic bound

Литература

1. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.
2. *Ложкин С.А.* Основы кибернетики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. – 256 с.
3. *Лупанов О.Б.* О синтезе контактных схем // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 119, № 1. – С. 23–26.
4. *Лупанов О.Б.* Об асимптотических оценках числа графов и сетей с n ребрами // Проблемы кибернетики. – М.: Физматгиз, 1960. – Вып. 3. – С. 5–21.
5. *Ложкин С.А.* О синтезе ориентированных контактных схем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 1995. – № 2. – С. 36–42.
6. *Lozhkin S.A., Shiganov A.E.* High accuracy asymptotic bounds on the BDD size and weight of the hardest functions // Fundamenta Informaticae. – to appear.
7. *Коршунов А.Д.* Об асимптотических оценках сложности контактных схем заданной степени // Дискр. анализ: Сб. тр. Ин-та математики СО АН СССР. – 1965. – Вып. 5. – С. 35–63.
8. *Ложкин С.А.* Асимптотические оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Наука, 1996. – Вып. 6. – С. 189–214.

Поступила в редакцию
02.03.09

Шиганов Александр Евгеньевич – аспирант факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *df-dx@mail.ru*